**Podela ugla na jednake delove - konstrukcijom**

**Značajna tačka dva kružna luka**

Konstruisati kružnice $k\_{1}\left(O\_{1}, r\right)$ i $k\_{2}\left(O\_{2}, r\right)$ gde je $O\_{2}\in k\_{1}$ (slika 1). Neka su presečne tačke kružnica $k\_{1}$ i $k\_{2}$ tačke A i P. Na kružnici $k\_{2}$ naznačiti tačku C odnosno luk $\hat{AC} $a na kružnici $k\_{1} $tačku $C\_{1}$ odnosno luk $\hat{A\_{1}C\_{1}} . $Datim lukovima odgovaraju centralni uglovi $∢AO\_{2}C=β$ i $∢A\_{1}O\_{1}C\_{1}=α$ .

Neka je $S\_{1}$ sredina luka $\hat{AC}$, a $S\_{2}$ sredina luka $\hat{A\_{1}C\_{1}} (A=A\_{1})$. Sredine konstruisati koristeći centralni i periferijski ugao kruga. Spojiti tačku C sa $O\_{1}$ tako da duž $CO\_{1}$ seče $k\_{1}$ u tački $C\_{3}$. Prava određena tačkom P i tačkom $C\_{3}$ seče $k\_{2}$ u tački $S\_{1}$. Prava određena tačkom P i tačkom $C\_{1}$ seče $k\_{2}$ u tački $C\_{2}$. Spojiti tačku $C\_{2}$ sa $O\_{1}$ tako da duž $C\_{2}O\_{1}$ seče $k\_{1}$ u tački $S\_{2}$.

Prava p određena tačkama C i $C\_{1}$ i prava q određena tačkama $S\_{1}$ i $S\_{2} $seku se u tački Y (p $∩q= \left\{Y\right\}$). Nazovimo tačku Y značajnom tačkom za lukove $\hat{AC}$ i $\hat{A\_{1}C\_{1}}$.

Za tačku Y važi da je odnos dužina lukova $\hat{AC}$ i $\hat{A\_{1}C\_{1}}$ jednak odnosu njihovih odgovarajućih centralnih uglova $β$ i $α$ $\left(\frac{\hat{AC}}{\hat{A\_{1}C\_{1}}}= \frac{β}{α}\right)$. Neka prava a sadrži tačku Y a kružnice $k\_{2}$ i $k\_{1}$ seče redom u tačkama D i $D\_{1}$. To je $\frac{\hat{AD}}{\hat{A\_{1}D\_{1}}}= \frac{β}{α}$. Dokaz ove jednakosti će se naći uz sliku 4.

Posebni položaji tačke Y

Posmatrajmo značajnu tačku Y za lukove $\hat{AC}$ i $\hat{A\_{1}C\_{1}}$ u slučaju kada je $\hat{AC}$ = $\hat{2A\_{1}C\_{1}}$. Tada je $O\_{1}=Y$ (slika 2) a za lukove $\hat{AC}$ i $\hat{A\_{1}C\_{1}}$ važi da je odnos njihovih dužina $\frac{\hat{AC}}{\hat{A\_{1}C\_{1}}}=\frac{2}{1}$. Ako povučemo pravu p koja sadrži tačku Y a kružnice $k\_{2}$ i $k\_{1}$ seče u tačkama D i $D\_{1}$ tada je $\frac{\hat{AD}}{\hat{A\_{1}D\_{1}}}=\frac{β\_{1}}{α\_{1}}= \frac{2}{1}$ ($∢AO\_{2}D=β\_{1} i ∢A\_{1}O\_{1}D\_{1}=α\_{1}$ ).



**Slika 2.**

Posmatrajmo značajnu tačku Y za lukove $\hat{AC}$ i $\hat{A\_{1}C\_{1}}$ u slučaju kada je $\hat{AC}$=$\hat{A\_{1}C\_{1}}$. Tada je P=Y (slika 3). Za lukove $\hat{AC}$ i $\hat{A\_{1}C\_{1}}$ važi da je odnos njihovih dužina $\frac{\hat{AC}}{\hat{A\_{1}C\_{1}}}=\frac{1}{1}$. Ako povučemo pravu p koja sadrži tačku Y a kružnice $k\_{2}$ i $k\_{1}$ seče u tačkama D i $D\_{1}$ tada je $\frac{\hat{AD}}{\hat{A\_{1}D\_{1}}}=\frac{β\_{1}}{α\_{1}}= \frac{1}{1}$ ($∢AO\_{2}D=β\_{1} i ∢A\_{1}O\_{1}D\_{1}=α\_{1}$).



**Slika 3.**

Posmatrajući posebne položaje tačke Y (prethodne 2 slike) može se zaključiti da ako prava p koja sadrži tačku Y seče $k\_{1} i k\_{2}$ redom u tačkama $D$ i $D\_{1}$ tada je $\frac{\hat{AD}}{\hat{A\_{1}D\_{1}}}=\frac{β}{α}$ (ugao $AO\_{2}C=β $ i ugao $A\_{1}O\_{1}C\_{1}=α$ ).

**Teorema 1:**

Neka prave a i b koje sadrže tačku Y seku $k\_{2} i k\_{1}$ redom u tačkama M i N odnosno $M\_{1}$ i $N\_{1}$. Ako je $\hat{AM}=\hat{MN}$ onda je $\hat{A\_{1}M\_{1}}=\hat{M\_{1}N\_{1}}$.

Dokaz:



**Slika: 4.**

Pretpostavimo da je $\hat{A\_{1}M\_{1}}<\hat{M\_{1}N\_{1}}$ i neka je $M\_{2}$ sredina luka $\hat{A\_{1}N\_{1}}$ ($M\_{2}\ne M\_{1}$). Prava koja sadrži tačke M i $M\_{2}$ seče pravu b u tački $Y\_{1}$ ($Y\_{1}\ne Y$). Tada je $Y\_{1}$ značajna tačka za $\hat{AN}$ i $\hat{A\_{1}N\_{1}}$ pa je:

$\frac{\hat{AM}}{\hat{MN}}=\frac{\hat{A\_{1}M\_{2}}}{\hat{M\_{2}N\_{1}}}$ .......................... (1)

Ako pretpostavimo da je $\hat{A\_{1}M\_{1}}>\hat{M\_{1}N\_{1}}$ i tačka $M\_{3}$ sredina luka $\hat{A\_{1}N\_{1}}$ ($M\_{3}\ne M\_{1}$). Prava koja sadrži tačke M i $M\_{3}$ seče pravu b u tački $Y\_{2}$ ($Y\_{2}\ne Y$). Tada je $Y\_{2}$ značajna tačka za $\hat{AN}$ i $\hat{A\_{1}N\_{1}}$ pa je:

$\frac{\hat{AM}}{\hat{MN}}=\frac{\hat{A\_{1}M\_{3}}}{\hat{M\_{3}N\_{1}}}$ .......................... (2)

Iz jednakosti (1) i (2) proizilazi da je $\frac{\hat{A\_{1}M\_{2}}}{\hat{M\_{2}N\_{1}}}=\frac{\hat{A\_{1}M\_{3}}}{\hat{M\_{3}N\_{1}}}$ odnosno $\frac{\hat{A\_{1}M\_{2}}}{\hat{A\_{1}M\_{3}}}=\frac{\hat{M\_{2}N\_{1}}}{\hat{M\_{3}N\_{1}}}$ što je nemoguće jer je $\hat{A\_{1}M\_{2}}>\hat{A\_{1}M\_{3}}$ i $\hat{M\_{2}N\_{1}}<\hat{M\_{3}N\_{1}}$ .

Zato mora biti $\hat{A\_{1}M\_{1}}=\hat{M\_{1}N\_{1}} .$

**Teorema 2:**

Neka prave p i q koje sadrže tačku Y seku kružnice $k\_{2} i k\_{1}$ redom u tačkama D i E odnosno $D\_{1}$ i $E\_{1}$. Tada je $\frac{\hat{AD}}{\hat{DE}}= \frac{\hat{A\_{1}D\_{1}}}{\hat{D\_{1}E\_{1} }} $ (slika 5).



**Slika 5.**

Neka jednakost $\frac{\hat{AD}}{\hat{DE}}= \frac{\hat{A\_{1}D\_{1}}}{\hat{D\_{1}E\_{1} }}$ nije tačna. Tada je recimo $\frac{\hat{AD}}{\hat{DE}}> \frac{\hat{A\_{1}D\_{1}}}{\hat{D\_{1}E\_{1} }}$. Postoji broj $\frac{m}{n},m, n \in N$ takav da je $\frac{\hat{AD}}{\hat{DE}}>\frac{m}{n}>\frac{\hat{A\_{1}D\_{1}}}{\hat{D\_{1}E\_{1} }}$ odnosno $n\*\hat{AD}>m\*\hat{DE}$. Neka su tačke G i F tačke kružnice $k\_{2} $takve da je $\hat{DG}=n\*\hat{AD}$ i $\hat{DF}=m\*\hat{DE}$ . Kako je n$ \*\hat{AD}>m\*\hat{DE}$ to je i $\hat{DG}>\hat{DF}$ odnosno $\hat{D\_{1}G\_{1}}$> $\hat{D\_{1}F\_{1}}$ . Pošto je $\hat{D\_{1}G\_{1}}$= n\*$\hat{A\_{1}D\_{1}}$ i $\hat{D\_{1}F\_{1}}$= m\*$\hat{D\_{1}E\_{1}}$ onda je n\*$\hat{A\_{1}D\_{1}}$> m\*$\hat{D\_{1}E\_{1}}$ odnosno $\frac{\hat{A\_{1}D\_{1}}}{\hat{D\_{1}E\_{1} }}>\frac{m}{n}$ što je suprotno pretpostavci. Znači $\frac{\hat{AD}}{\hat{DE}}=\frac{\hat{A\_{1}D\_{1}}}{\hat{D\_{1}E\_{1}}} $.

Sada je moguće iskoristiti značajnu tačku Y da se konstrukcijom neki ugao $α$ podeli na $n$ jednakih delova $(n\in \left\{2, 3, 4, 5…\right\})$.

Primer: Konstrukcijom podeliti datu ugao $α$ na tri jednaka dela $(n=3)$. Uglu $α$ opisati luk $\hat{KL}$ poluprečnika r. Konstruisati kružnice $k\_{1}\left(O\_{1}, r\right)$ i $k\_{2}\left(O\_{2}, r\right)$ gde je $O\_{2}\in k\_{1}$ (slika 6).

Neka je $k\_{1}∩k\_{2}= \left\{A, P\right\}$. Na kružnici $k\_{2}$ naznačiti tačke M, N, R tako da je $\hat{AM }=\hat{MN }=\hat{NR }$. Na kružnici $k\_{1}$ naznačiti tačku $R\_{1}$ tako da je $\hat{A\_{1}R\_{1}}$= $\hat{KL} (A=A\_{1})$. Za lukove $\hat{AR }$ i $\hat{A\_{1}R\_{1}}$ konstruisati značajnu tačku Y. Povući prave p i q određene tačkama M, Y odnosno tačkama N, Y. Prave p i q seku kružnicu $k\_{1}$ u tačkama $M\_{1}$ i $N\_{1}$ tako da je $\hat{A\_{1}M\_{1}}$= $\hat{M\_{1}N\_{1}}=\hat{N\_{1}R\_{1}}$. Tako je ugao $α$ odnosno njegov luk $\hat{KL}$ podeljen na tri jednaka dela.

Postupak ponoviti za slučajeve kada je $n\in \left\{2, 3, 4, 5…\right\}$.

 **Slika 6.**